

УДК 51.681.3

# АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ ПРОТИВОРЕЧИВОСТИ МНОЖЕСТВА ДИЗЬЮНКТОВ В ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

*С.Л. Крывый, С.В. Волошин, Н.С. Маркова*

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины,  
Киев, проспект Академика Глушкова, 40.  
Тел: (044) 526 2128, e-mail: svoloshyn@gmail.com

Описывается подход к проверке противоречивости множества дизъюнктов в исчислении высказываний методом резолюций, основанный на модифицированном TSS-методе решения систем линейных однородных диофантовых уравнений. Алгоритм проверки противоречивости множества дизъюнктов в исчислении высказываний

An approach to checking of satisfaction problem of propositional disjunction set by using resolution method is described. This algorithm is used TSS-method for solution of homogeneous systems of linear Diophantine equations. An algorithm for checking of satisfaction problem for propositional disjunction set

## Введение

Проверка противоречивости множества дизъюнктов является одной из основных задач при проектировании и верификации программного и технического обеспечения современных ЭВМ, а также в теории и практике логического вывода. Одним из наиболее практичных методов определения противоречивости множества дизъюнктов в исчислении высказываний является метод резолюций, о котором и пойдет речь в данной работе. При этом множество дизъюнктов, представляющих некоторую формулу исчисления высказываний или булеву функцию, преобразуется в систему линейных однородных диофантовых уравнений с коэффициентами из множества  $\{0, 1, -1\}$ . Идея предлагаемого метода представлена в [1] и данная работа является её развитием.

## 1. Необходимые сведения

Литерой в исчислении высказываний (ИВ) называется атомарная формула или отрицание атомарной формулы. Дизъюнктом называется дизъюнкция конечного числа литер, а однолитерным дизъюнктом называется дизъюнкт, являющийся литерой. Однолитерный дизъюнкт называется негативным, если он является отрицанием атомарной формулы, в противном случае он называется позитивным. Однолитерный дизъюнкт также называется единичным.

Литеры  $p$  и  $\neg p$  называются контрадными. Правило резолюций для ИВ имеет вид:  $p \vee q, \neg p \vee r \vdash q \vee r$ , где  $p$  – литера, а  $q, r$  – произвольные дизъюнкты. Дизъюнкт, полученный в результате применения правила резолюций к дизъюнктам  $C$  и  $C'$ , называется резольвентой данных дизъюнктов. Известно, что произвольную формулу ИВ можно представить в конъюнктивной нормальной форме (КНФ), т. е. в виде конъюнкции множества дизъюнктов. Обычно формулу представляют в виде множества ее дизъюнктов, а каждому такому множеству можно однозначно сопоставить матрицу из коэффициентов  $-1, 0$  и  $1$ . Эта матрица строится так: дизъюнктам соответствуют строки, а столбцы соответствуют атомарным формулам, входящим в дизъюнкты. При этом на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, соответствующего атомарной формуле  $p$ , стоит  $-1$ , если  $i$ -й дизъюнкт содержит литеру  $\neg p$ ;  $1$ , если  $i$ -й дизъюнкт содержит литеру  $p$ ;  $0$ , если  $i$ -й дизъюнкт не содержит ни литеры  $p$  ни литеры  $\neg p$ . Следовательно, размерность матрицы, построенной таким образом, равна  $|S| \times m$ , где  $|S|$  – количество дизъюнктов в множестве  $S$ , а  $m$  – количество атомарных формул, входящих в дизъюнкты множества  $S$ .

**Пример 1.** Для множества дизъюнктов  $S$ , атомарные формулы которого расположены в порядке  $p, q, r, s$ ,

$$p \vee \bar{q} \vee r, \bar{p} \vee q \vee r, p \vee q \vee \bar{r} \vee \bar{s}, \bar{q} \vee \bar{r} \vee s, p \vee r \vee s, \bar{p} \vee q \vee \bar{s},$$

где  $\bar{x}$  означает отрицание формулы  $x$ , соответствующая матрица имеет вид

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 2. Оптимизация исходных данных

Проверка противоречивости множества дизъюнктов  $S$  может быть выполнена с помощью анализа матрицы  $A_s^T$ , транспонированной к матрице  $A_s$ . Действительно, получение пустого дизъюнкта с помощью правила резолюций, как будет показано далее, равносильно поиску линейной зависимости между столбцами матрицы  $A_s^T$ . Данный поиск затрудняется тем, что при сложении двух столбцов матрицы  $A_s^T$  (а это соответствует построению резольвенты двух дизъюнктов, соответствующих этим столбцам) могут порождаться тавтологичные дизъюнкты. Следовательно, допустимыми будут не все возможные комбинации столбцов, а только те, которые не порождают тавтологий. Комбинации двух дизъюнктов будет допустимой, если эти дизъюнкты содержат только одну контрарную пару формул. Например, рассмотрим второй и пятый дизъюнкты из множества  $S$ , приведенного в примере 1. Эти дизъюнкты можно комбинировать, так как они порождают резольвенту  $q \vee r \vee s$  (т. е. новый столбец  $(0, 1, 1, 1)^T$ ). А первый и второй дизъюнкты из  $S$  при применении к ним правила резолюций порождают тавтологию  $\bar{q} \vee q \vee r = 1 \vee r = 1$ . Полученные таким способом тавтологии бесполезны для дальнейшей проверки противоречивости и появления таких резольвент необходимо избегать.

Чтобы избежать появления тавтологичных резольвент в процессе поиска допустимых комбинаций, выполняется проверка наличия других контрарных пар в комбинируемых дизъюнктах. Если такие пары существуют, то резольвента этих столбцов не строится, в противном случае выполняется покомпонентная дизъюнкция соответствующих столбцов.

Анализируя матрицу  $A_s^T$  и используя свойства правила резолюций, можно выполнить некоторые её оптимизирующие преобразования, позволяющие упростить как саму матрицу, так и процесс резолюционного вывода.

**Первое оптимизирующее преобразование** связано с наличием в множестве  $S$  единичных дизъюнктов. Если в множестве дизъюнктов имеется однолитерный дизъюнкт, то с его помощью удаляются все контрарные ему литеры в остальных дизъюнктах. После этого сам дизъюнкт и все дизъюнкты, его содержащие, удаляются из текущего множества дизъюнктов.

Это преобразование позволяет уменьшить размеры матрицы  $A_s^T$  и более эффективно выполнять вычисления.

**Пример 2.** Пусть множество  $S$  включает такие дизъюнкты:

$$p, \bar{p} \vee q \vee r, \bar{q} \vee r \vee s, \bar{r} \vee s, \bar{s}.$$

Тогда матрица  $A_s^T$  имеет вид

$$A_s^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Редукция  $A_s^T$  с помощью первого оптимизирующего преобразования в конце концов приводит к пустому дизъюнкту. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а это значит, что множество  $S$  противоречиво.

**Второе оптимизирующее преобразование.** Если в матрице  $A_S^T$  имеется строка, содержащая только лишь негативные (позитивные) литеры, то из  $A_S^T$  удаляются все столбцы, которым принадлежат ненулевые значения данной строки. Например, если  $A_S^T$  имеет вид

$$A_S^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то очевидно, что второй столбец не будет принимать участия в получении пустого дизъюнкта, поскольку атомарной формуле, которой соответствует данная строка, нет контрарной пары. Поэтому проверять противоречивость  $S$  можно исходя из матрицы

$$A_S^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Третье оптимизирующее преобразование.** Это преобразование традиционное в методе резолюций – удаление наддизъюнктов в текущем множестве дизъюнктов. Поиск и удаление наддизъюнктов сводится к конъюнкции столбцов. При этом, если  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \wedge (y_1, y_2, \dots, y_n)^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , то второй дизъюнкт-столбец наддизъюнкт первого дизъюнкта-столбца.

### 3. Применение модифицированного TSS-алгоритма

Рассмотрим одну из модификаций TSS-алгоритма [3] для решения задачи проверки противоречивости множества дизъюнктов в исчислении высказываний. Эта модификация хороша тем, что ее применение позволяет не только проверять противоречивость, но и определять минимальные подмножества дизъюнктов, являющиеся противоречивыми.

Построим по множеству дизъюнктов  $S$  систему однородных линейных диофантовых уравнений (СЛОДУ)  $A_S^T x = 0$ . Тогда определение противоречивости множества дизъюнктов  $S$  сводится к определению совместности СЛОДУ  $A_S^T x = 0$  согласно следующему алгоритму.

АПП-TSS ( $S$ )

Вход: Множество дизъюнктов  $S$ .

Выход: ВЫПОЛНИМО или ПРОТИВОРЕЧИВО.

Метод:

начало

1) построить  $A_S^T$  для  $S$ ;

2) оптимизировать  $A_S^T$ ;

3)  $i := 1$ ;

4) вычислить TSS для  $L_i(x) = 0$ ;

5) для всех  $j = i + 1$  до  $p$  выполнить

(Для всех  $e \in TSS$  найти значения  $L_j(e)$ );

Построить матрицу  $A'(S) = [L_j | \dots | L_p]$

(столбцы, обозначенные  $[L_j | \dots | L_p]$  в матрице  $A'(S)$ , означают столбцы значений уравнений  $L_j(x) \dots L_p(x)$  на векторах  $e \in TSS$ )

кц;

6) удалить те  $e \in TSS$ , которые порождают тавтологии; (т. е. те вектора, для которых значения  $L_j(e) = 0$ , причем ненулевые координаты  $e$  не попадают на нулевые коэффициенты  $L_j(x)$  при вычислении значений  $L_j(e)$ );

7) если  $TSS = \emptyset$ , то (ВЫПОЛНИМО; на 9);

8)  $i := i + 1$ ; Если  $i \leq p$  то (Построить TSS, используя значения  $L_i(x)$  для матрицы  $A'(S)$ ;  $j := i$ ; на 5)

иначе если  $TSS = \emptyset$  то ВЫПОЛНИМО

иначе ПРОТИВОРЕЧИВО;

9) СТОП;

конец

Обоснованием данного алгоритма служит такая теорема.

**Теорема.** Множество дизъюнктов  $S$  противоречиво тогда и только тогда, когда СЛОДУ  $A_S^T x = 0$  имеет непустое множество решений, сгенерированное алгоритмом АПП-TSS.

*Доказательство.* ( $\rightarrow$ ) Если СЛОДУ  $A_S^T x = 0$  имеет хотя бы одно ненулевое решение, то в силу построения алгоритмом АПП-TSS, очевидно, что дизъюнкты, соответствующие ненулевым координатам решения, составляют минимальное противоречивое подмножество дизъюнктов. А это значит что и все множество  $S$  тоже будет противоречивым.

( $\leftarrow$ ) Пусть  $S$  противоречивое множество дизъюнктов, по которому вышеописанным способом построена СЛОДУ  $A_S^T x = 0$ . Рассмотрим первое из уравнений этой СЛОДУ и найдем базис его множества решений с помощью АПП-TSS. Это уравнение должно иметь хотя бы одно решение, поскольку в противном случае это противоречит тому, что  $S$  противоречиво. Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – решение этого уравнения. Если  $x$  имеет две ненулевые координаты  $x_i$  и  $x_j$ , то это значит, что  $x$  соответствует резольвенте дизъюнктов  $C_i$  и  $C_j$ . А если  $x$  имеет одну ненулевую координату  $x_k$ , то соответствующий дизъюнкт не резольвируется ни с каким дизъюнктом из  $S$ . Отсюда следует, что все решения первого уравнения соответствуют всем возможным резольвентам по одной из переменных. Но тогда дизъюнкты, содержащие данную переменную с отрицанием (или без), можно удалить, так как они в дальнейшем не будут принимать участия в резолюционном выводе.

Повторяя аналогичную процедуру со вторым, третьим и т. д.  $p$ -м уравнением СЛОДУ, получаем решения СЛОДУ и такое решение должно существовать в силу противоречивости множества  $S$ .

Теорема доказана.

## 4. Иллюстрирующие примеры

Рассмотрим применение этого алгоритма к множеству дизъюнктов, приведенному в примере 1 и которому соответствует СЛОДУ из примера 2. Построение TSS для первого уравнения дает такое множество решений (во 2, 3 и 4 столбцах показаны значения соответственно 2, 3 и 4 уравнений, если подставить решения первого уравнения в эти уравнения):

TSS	$L_2$	$L_3$	$L_4$
000100	-1	-1	1
110000	0	-	-
011000	2	0	-
010010	1	2	1
100001	0	-	-
001001	2	-1	-2
000011	1	1	0

После чистки получаем векторы

TSS	$L_2$	$L_3$	$L_4$
000100	-1	-1	1
010010	1	2	1
001001	2	-1	-2

Комбинирование по значениям второго столбца порождает такие векторы

TSS	$L_3$	$L_4$
010110	1	2
001201	-3	0

После чистки получаем единственный вектор

TSS	$L_3$	$L_4$
010110	1	2

Дальнейшее комбинирование невозможно выполнить, поскольку комбинировать не с кем. Следовательно, исходная СЛОДУ не имеет решений (несовместна) и множество дизъюнктов  $S$  непротиворечиво.

Рассмотрим еще один пример, который взят из учебника по операционным системам и который можно найти в [4]. Являются ли формулы  $P \wedge \neg B$  и  $I \wedge \neg N$  следствиями нижеприведенных формул

$$A \rightarrow P, (P \wedge \neg B) \rightarrow D, D \rightarrow (S \wedge M \wedge H), H \wedge N \rightarrow R, H \wedge \neg R \rightarrow I, A \wedge \neg B \wedge \neg R?$$

Преобразуем данные формулы к КНФ

$$\neg A \vee P, \neg P \vee B \vee D, \neg D \vee S, \neg D \vee M, \neg D \vee H, \neg H \vee \neg N \vee R, \neg H \vee R \vee I, A, \neg B, \neg R.$$

Добавляем к имеющимся дизъюнктам отрицания формул  $P \wedge \neg B$  и  $I \wedge \neg N$ , которые после приведения к КНФ принимают вид:  $\neg P \vee B, \neg I \vee N$ . Полученному множеству дизъюнктов соответствует СЛОДУ (строки, которые соответствуют переменным обозначены слева этими переменными)

$$A_S^T \cdot x = \begin{pmatrix} A | -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & =0 \\ P | 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & =0 \\ B | 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & =0 \\ D | 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & =0 \\ S | 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & =0 \\ M | 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & =0 \\ H | 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & =0 \\ R | 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & =0 \\ I | 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & =0 \\ N | 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & =0 \end{pmatrix}.$$

Применяя алгоритм АПП-TSS к полученному множеству дизъюнктов, получаем два решения  $x_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$ , которому соответствует такое минимальное противоречивое подмножество дизъюнктов  $\neg A \vee P, A, \neg B, \neg P \vee B$ , второе решение  $x_2 = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$ , которому соответствует такое минимальное противоречивое подмножество дизъюнктов:  $\neg A \vee P, A, \neg B, \neg P \vee B \vee D, \neg D \vee H, \neg H \vee \neg N \vee R, \neg H \vee R \vee I, \neg R, \neg I \vee N$ . В правильности этого решения можно убедиться непосредственной проверкой. Следовательно, поскольку отрицания первой и второй из проверяемых формул входят в соответствующие противоречивые подмножества, то сами формулы являются логическими следствиями данного множества дизъюнктов.

## 5. Результаты экспериментов

Приведены результаты экспериментов на множествах дизъюнктов, которые встречаются в процессе проектирования реальных систем. В целях экономии приведены только лишь наиболее существенные множества дизъюнктов и результаты их проверки на противоречивость. Эксперименты проводились на компьютере IBM PC с RAM 256 Мб, процессор: AMD Athlon XP 1800+:

1) Матрица  $A_1^T$  (30×20):

```
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 1 0 0 -1 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 -1 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 1 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 -1 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0 0 0 -1 0
0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1
0 0 0 1 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
```

2) Матрица  $A_2^T$  (30×36):

```
-1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 -1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 -1 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 -1 -1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 -1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 -1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 1
```

[illegible]

Система	Количество решений	Общее время вычисления	
		Без оптимизации	С оптимизацией
Для множества дизъюнктов, соответствующих матрице $A_1^T$	0	313 мс	47мс
Для множества дизъюнктов, соответствующих матрице $A_2^T$	6	438 мс	546 мс
Для множества дизъюнктов, соответствующих матрице $A_3^T$	0	3,5 мин.	94 мс

## Заключение

Отметим, что описанный метод применялся при проверке выполнимости булевых функций, представленных в КНФ. Хорошо известно, что проблема проверки выполнимости булевой функции, зависящей не менее чем от трех переменных, имеет экспоненциальную оценку временной сложности. Данный алгоритм в худшем случае тоже имеет экспоненциальную оценку временной сложности. Однако, в среднем сложность данного алгоритма лучше, чем сложность классических методов проверки выполнимости булевых функций [2].

1. *Кривой С.Л., Хайдер М., Багрий Р.А.* Приложения алгоритмов решения систем линейных констрейнтов. Материалы междунар. конф. “Алгебра, логика и кибернетика”. – Иркутск, 25–28 августа 2004 – С. 165–166.
2. *Васильев Ю.Л., Ветухновский Ф.Я., Глаголев В.В.* и др. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. – М: Наука, 1974. – 311 с.
3. *Кривой С.Л.* Алгоритмы решения систем линейных ограничений в целочисленных областях. // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 2. – С. 3 – 17.
4. *Кривий С.Л.* Дискретна математика: вибрани питання. – К.: Видавничий дім “Кисво-Могилянська академія”, 2007. – 570 с.